

# СИГНАЛЫ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ВРЕДНОГО СПЕКТРА

В. А. Котельников

Радиотехника и электроника, 1996, т. 41, № 7, с. 773–780

Рассматриваются сигналы, имеющие минимальную энергию составляющих спектра вне заданной полосы частот.

## Постановка задачи

Сигнал может начаться лишь после момента времени  $a$ , когда было принято решение о его посылке. Поэтому функция времени  $f(t) = f$ , выражающая сигнал, должна удовлетворять условию

$$f = 0 \text{ при } t < a. \quad (1)$$

Такая функция, как известно, имеет всегда спектр, простирающийся до бесконечности [1].

Представляет интерес выяснить: какова должна быть  $f$ , удовлетворяющая условию (1), чтобы энергия составляющих ее спектра за пределами некоторой полосы частот была бы минимальной, и каков этот минимум. Эта энергия может создавать помехи для сигналов в соседних областях спектра. Ее мы будем называть *вредной* и обозначать  $W_v$ .

Мы будем рассматривать случай, когда вредной энергией считается энергия спектра за пределами полосы  $-\Omega, \Omega$ . Ряд других случаев может быть сведен к нему, если использовать свойства модулированных колебаний. Угловую частоту  $\Omega$  мы будем называть *граничной частотой*.

При приеме сигнала не всегда можно использовать всю его энергию, так как не всегда можно ждать, когда сигнал полностью затухнет. Поэтому введем понятие *энергия полезного участка сигнала*. Она будет равна

$$W_n = \int_a^b f^2 dt,$$

где  $b$  — момент времени, когда кончается регистрация сигнала для принятия решения о нем.

И, наконец, введем понятие *энергия «хвоста» сигнала*:

$$W_x = \int_b^{\infty} f^2 dt.$$

В этой работе мы будем искать  $f$ , удовлетворяющую условию (1), для которой при заданном

$$H_x = \frac{W_x}{W_n} \quad (2)$$

величина

$$H_B = \frac{W_B}{W_n} \quad (3)$$

минимальна.

Такую функцию назовем *оптимальным сигналом*.

### Решение

Для решения этой задачи введем вспомогательную величину

$$H_R = H_B + RH_x, \quad (4)$$

где  $R$  — некоторая постоянная, и будем искать такую функцию  $f$ , которая обеспечит минимальное возможное значение  $H_R$ . Эту функцию мы обозначим  $\tilde{f}$  и соответствующие ей величины  $H_R$ ,  $H_B$ ,  $H_x$  через  $\tilde{H}_R$ ,  $\tilde{H}_B$ ,  $\tilde{H}_x$ .

Очевидно справедливо неравенство

$$H_B + RH_x \geq \tilde{H}_B + R\tilde{H}_x, \quad (5)$$

поскольку  $\tilde{H}_R$  — минимально возможное значение  $H_R$ .

Если брать не любые функции  $f$ , а лишь те, для которых  $H_x = \tilde{H}_x$ , то для них на основании (5) будет  $H_B \geq \tilde{H}_B$ .

Таким образом,  $\tilde{H}_B$  будет минимально возможным значением  $H_B$  при условии, что  $f$  таково, что  $H_x = \tilde{H}_x$ . Отсюда следует, что  $f$ , обеспечивающее минимально возможное значение  $H_R$ , будет оптимальным сигналом при условии, что  $H_x = \tilde{H}_x$ . Задаваясь различными значениями  $R$ , мы получим серию функций  $f$ ,  $\tilde{H}_R$ ,  $\tilde{H}_x$ ,  $\tilde{H}_B$  и зависимость между ними.

Введем понятие *низкочастотная часть функции  $f$*  и обозначим ее, добавив индекс  $n$ . Будем считать

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6)$$

где

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt$$

— спектр функции  $f$ .

Отметим, что  $f_n$  как функция с ограниченным спектром всегда простирается от  $-\infty$  до  $+\infty$  и если не равна нулю при всех  $t$ , может равняться нулю только в отдельных точках [1].

Очевидно

$$W_B = \int_a^{\infty} f^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2 dt. \quad (7)$$

В соответствии с этим и выражениями (2)–(4) будем иметь

$$H_R = \frac{\int_a^{\infty} f^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2 dt + R \int_b^{\infty} f^2 dt}{\int_a^b f^2 dt}. \quad (8)$$

Возьмем  $f = \tilde{f} + \mu\varphi$ , где  $\mu$  — некоторая постоянная,  $\varphi$  — произвольная функция времени, удовлетворяющая условию (1). Получим

$$H_R = \left( \int_a^{\infty} (\tilde{f} + \mu\varphi)^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_n + \mu\varphi)^2 dt + R \int_b^{\infty} (\tilde{f} + \mu\varphi)^2 dt \right) / \left( \int_a^b (\tilde{f} + \mu\varphi)^2 dt \right). \quad (9)$$

Раскрывая это выражение и пренебрегая членами, содержащими  $\mu$  во второй и более высоких степенях, получим

$$H_R = \frac{A}{B} \left[ 1 + \frac{2\mu}{A} \left( \int_a^{\infty} \tilde{f}\varphi dt - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n\varphi_n dt + R \int_b^{\infty} \tilde{f}\varphi dt - \frac{A}{B} \int_a^b \tilde{f}\varphi dt \right) \right].$$

Здесь  $A$  и  $B$  — значения числителя и знаменателя выражения (9) при  $\mu = 0$ .

Преобразуем второй интеграл. В соответствии с теоремой Парсеваля, по которой для действительных функций  $f(t)$  и  $g(t)$  справедливо выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_f(\omega)G_{\varphi}^*(\omega) d\omega,$$

где

$$G_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

$$G_\varphi^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{i\omega t} dt,$$

и принимая во внимание, что  $f_n$  имеет спектр в пределах  $-\Omega$ ,  $\Omega$  и что при  $t < a$ , по условию,  $\varphi = 0$  получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n \varphi_n dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n \varphi dt = \int_a^{\infty} \tilde{f}_n \varphi dt.$$

Разбивая интервал интегрирования на участки, komponуя их и учитывая, что  $A/B = \tilde{H}_R$ , получим

$$H_R = \tilde{H}_R \left\{ 1 + \frac{2\mu}{A} \left[ \int_a^b (\tilde{f} - \tilde{f}_n - \tilde{H}_R \tilde{f}) \varphi dt + \int_b^{\infty} (\tilde{f} - \tilde{f}_n + R\tilde{f}) \varphi dt \right] \right\}. \quad (10)$$

Если скобки под интегралами не равны нулю на участках интегрирования, то всегда можно выбрать  $\varphi$  так, что будет  $H_R < \tilde{H}_R$ , а это противоречит условию, что  $\tilde{H}_R$  минимально возможное значение  $H_R$ . Таким образом, должно быть

- 1)  $\tilde{f} = 0$  на участке  $-\infty, a$ ; по условию (1);
- 2)  $\tilde{f} = \frac{1}{1 - \tilde{H}_R} \tilde{f}_n$  на участке  $a, b$ ;
- 3)  $\tilde{f} = \frac{1}{1 + R} \tilde{f}_n$  на участке  $b, \infty$ .

Величину  $\tilde{H}_R$  можно найти, если воспользоваться уравнением (8), выразив в нем  $\tilde{f}$  через  $\tilde{f}_n$  с помощью уравнений (11). Получим

$$V = \frac{\tilde{H}_R}{1 - \tilde{H}_R} = \frac{\int_{-\infty}^a \tilde{f}_n^2 dt + \frac{R}{1 + R} \int_b^{\infty} \tilde{f}_n^2 dt}{\int_a^b \tilde{f}_n^2 dt} = \frac{I_a + \frac{R}{1 + R}(I_\infty - I_b)}{I_b - I_a} \quad (12)$$

и

$$\tilde{H}_R = \frac{V}{1 + V}, \quad (13)$$

где

$$I_p = \int_{-\infty}^p \tilde{f}_n^2 dt, \quad p = a, b, \infty. \quad (14)$$

Функция  $\tilde{f}_n$  имеет спектр в пределах  $-\Omega, \Omega$  и поэтому, как можно показать, может быть представлена рядом

$$\tilde{f}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin(\Omega t - n\theta)}{\Omega t - n\theta}, \quad (15)$$

где

$$\theta \leq \pi.$$

Обычно принимают  $\theta = \pi$ , но в данном случае оказалось, что ряд лучше сходится при  $\theta = 2/3\pi$ . Это значение  $\theta$  и было принято.

Для того чтобы  $\tilde{f}$  соответствовало оптимальному сигналу, выполнение условий, выраженных формулами (11) и (12), необходимо, но недостаточно. Эти условия будут выполняться также для  $f$ , соответствующих максимуму и другим экстремумам  $\tilde{H}_R$ . Чтобы получить оптимальный сигнал надо выбрать  $\tilde{f}_n$  таким, чтобы величина  $\tilde{H}_R$ , выражаемая формулами (12) и (13), была минимальной, а затем определить  $\tilde{f}$  с помощью уравнений (11). При этом должно быть выполнено условие, что  $\tilde{f}_n$  является низкочастотной частью  $f$ . Но, как можно показать, это условие всегда будет выполняться, если  $\tilde{f}_n$  представлено рядом (15) и  $f$  определено с помощью уравнений (11) и (12).

Таким образом, оптимальный сигнал  $\tilde{f}$  должен выражаться уравнениями (11), где  $\tilde{f}_n$  определяется уравнением (15), в котором  $x_n$  соответствует минимуму величины  $V$  или, как это следует из (13), минимуму  $\tilde{H}_R$ .

Перейдем к отысканию  $x_k$ , обеспечивающих минимум  $V$ , для чего подставим в (14) выражение (15). Получим

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{-\infty}^p \tilde{f}_n^2 dt = \int_{-\infty}^p \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta} \right]^2 dt = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_p(l, m) x_l x_m, \quad (16) \end{aligned}$$

здесь

$$C_p(l, m) = \int_{-\infty}^p \frac{\sin(\Omega t - l\theta)}{\Omega t - l\theta} \frac{\sin(\Omega t - m\theta)}{\Omega t - m\theta} dt.$$

Проведя интегрирование, получаем

$$C_p(l, m) = \frac{1}{\Omega} \frac{\cos[(l-m)\theta]}{2(l-m)\theta} [\text{Cin}(2\Omega p - 2l\theta) - \text{Cin}(2\Omega p - 2m\theta)] + \\ + \frac{1}{\Omega} \frac{\sin[(l-m)\theta]}{2(l-m)\theta} [\text{Si}(2\Omega p - 2l\theta) + \text{Si}(2\Omega p - 2m\theta) + \pi]$$

при  $l \neq m$  и

$$C_p(m, m) = \frac{1}{\Omega} \left[ \frac{\cos(2\Omega p - 2m\theta) - 1}{2\Omega p - 2m\theta} + \text{Si}(2\Omega p - 2m\theta) + \frac{\pi}{2} \right], \\ C_\infty(l, m) = \frac{\pi}{\Omega} \frac{\sin[(l-m)\theta]}{(l-m)\theta}$$

и

$$C_\infty(m, m) = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Мы использовали общепринятые обозначения

$$\text{Cin}(z) = \int_0^z \frac{1 - \cos(y)}{y} dy, \quad \text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin(y)}{y} dy.$$

Для этих функций имеются таблицы и приближенные формулы [2].

Подставляя значение  $I_p$  из (16) в (12), получим

$$V = \frac{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A(l, m)x_l x_m}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B(l, m)x_l x_m},$$

$$A(l, m) = C_a(l, m) + \frac{R}{1+R} [C_\infty(l, m) - C_b(l, m)], \\ B(l, m) = C_b(l, m) - C_a(l, m).$$

Метод отыскания  $x_n$ , обеспечивающих минимум  $V$ , изложен в приложении.  $\tilde{H}_R$  находится из выражения (13).

$\tilde{H}_x$  можно отыскать, подставляя в уравнение (2) значение  $\tilde{f}$  из (11), учитывая (14), получим

$$\hat{H}_x = \frac{\frac{1}{(1+R)^2}(I_\infty - I_b)}{\frac{1}{(1-\tilde{H}_R)^2}(I_b - I_a)}.$$

Далее, на основании (3), (7), (11) и (14)

$$\tilde{H}_b = \frac{\frac{1}{(1-\tilde{H}_R)^2}(I_b - I_a) + \frac{1}{(1+R)^2}(I_\infty - I_b) - I_\infty}{\frac{1}{(1-\tilde{H}_R)^2}(I_b - I_a)}.$$

Величины  $\tilde{H}_R$ ,  $\tilde{H}_x$  и  $\tilde{H}_b$  будут зависеть от  $R$ ,  $\Omega a$  и  $\Omega b$ . Но так как очевидно, что выбор начала отсчета времени не должен влиять на них, то они будут зависеть только от  $R$  и  $\Omega b - \Omega a = \frac{2\pi}{T_r}(b - a) = 2\pi\alpha$ , где  $T_r$  — период граничной частоты,  $\alpha = \frac{b - a}{T_r}$ .

### Расчеты

Прямых формул, выражающих зависимость  $\tilde{H}_R$ ,  $\tilde{H}_x$  и  $\tilde{H}_b$  от  $R$  и  $\alpha$  с помощью известных функций, получить не удалось, поэтому были проведены конкретные расчеты для

$R = \infty; 5; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1; 0,05$  и  $\alpha = 0,125; 0,25; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5$ .

При этом были получены следующие результаты.

Таблица 1. Параметры сигналов при  $a = -0,125T_r$ ,  $b = 0,125T_r$ ,  $\alpha = 0,25$

$R$	$H_R$	$H_x$	$H_b$	$X_{-1}$	$X_0$	$X_1$
$\infty$	0,5322	0	0,5322	0,0322	1	0,0322
5	0,5098	0,0041	0,4894	0,0079	1	0,0628
2	0,4830	0,0197	0,4434	-0,0148	1	0,1094
1	0,4496	0,0569	0,3927	0,0336	1	0,1871
0,5	0,4045	0,1452	0,3319	-0,0428	1	0,3370
0,2	0,3312	0,4271	0,2458	0,0188	1	0,7293
0,1	0,2718	0,8375	0,1880	0,0366	1	1,2251
0,05	0,2182	1,3818	0,1491	0,1184	1	1,8622

Таблица 2. Параметры сигналов при  $a = -0,25T_r$ ,  $b = 0,25T_r$ ,  $\alpha = 0,5$

$R$	$H_R$	$H_x$	$H_b$	$X_{-1}$	$X_0$	$X_1$
$\infty$	0,2167	0	0,2167	0,1310	1	0,1310
5	0,2017	0,0026	0,1885	0,1110	1	0,1561
2	0,1848	0,0121	0,1606	0,0924	1	0,1942
1	0,1649	0,0328	0,1322	0,0771	1	0,2571
0,5	0,1400	0,0770	0,1015	0,0699	1	0,3765
0,2	0,1036	0,1986	0,0639	0,0896	1	0,6737
0,1	0,0775	0,3477	0,0427	0,1312	1	1,0169
0,05	0,0563	0,5148	0,0306	0,1867	1	1,4091

Таблица 3. Параметры сигналов при  $a = -0,5T_r$ ,  $b = 0,5T_r$ ,  $\alpha = 1$ 

$R$	$H_R$	$H_x$	$H_b$	$X_{-1}$	$X_0$	$X_1$
$\infty$	0,0190	0	0,0190	0,5170	1	0,5170
5	0,0173	0,0003	0,0159	0,5014	1	0,5353
2	0,0156	0,0013	0,0130	0,4800	1	0,5619
1	0,0135	0,0033	0,0103	0,4713	1	0,6030
0,5	0,0111	0,0072	0,0075	0,4590	1	0,6735
0,2	0,0079	0,0163	0,0046	0,4545	1	0,8182
0,1	0,0059	0,0254	0,0033	0,4597	1	0,9475
0,05	0,0044	0,0339	0,0027	0,4686	1	1,0623

1. При  $R = \infty$  в соответствии с (11)  $f = 0$  при  $t < a$  и  $t < b$ , т. е. весь оптимальный сигнал сосредоточен на участке  $a, b$ . В этом случае  $\tilde{H}_x = 0$ ,  $\tilde{H}_b = \tilde{H}_R = H_0$  и  $\tilde{f}$  оказывается симметричной.

Зависимость  $H_0$  от  $\alpha$  для этого случая приведена на рис. 1. При  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $H_0 \rightarrow 1$ . Это следует и из общих соображений. При  $\alpha = 0.25$  примерно 50% энергии сигнала уходит за пределы граничной частоты, при  $\alpha = 0.5$  — около 20%, при  $\alpha = 1$  — около 2%, при 1.5 — около 0.1%, при 2 — около 1/200%. Дальше  $H_0$  уменьшается быстрее чем в 400 раз при увеличении  $\alpha$  на единицу. При не оптимальном сигнале за граничную частоту будет уходить больше энергии. Случай с  $\tilde{H}_x = 0$  был уже рассмотрен с помощью мало распространенных удлиненных волновых функций в работе [3] и там же приведены значения  $H_0$  для  $\alpha = \frac{1}{4\pi}$ ;  $\frac{1}{2\pi}$ ;  $\frac{1}{\pi}$ ;  $\frac{2}{\pi}$ . Они согласуются с рис. 1. Приблизненно  $\tilde{f}$  для этого случая может быть представлена с помощью так называемого «окна Кайзера» [4].

2. При  $R$  конечном сигнал не кончается в момент  $b$ ,  $\tilde{H}_x \neq 0$  и величина  $\tilde{H}_b$  уменьшается с увеличением  $\tilde{H}_x$ . Результаты расчета приведены на рис. 2. В этом случае оказалось удобным по оси абсцисс откладывать величину  $\tilde{H}_x/H_0$ , а по оси ординат  $\tilde{H}_b/H_0$ . На рисунке приводятся кривые для значений  $\alpha = 0.25$ ; 0.5; 1. Для значений  $\alpha = 1.5$  и 2, чтобы не усложнять рисунок, приводятся отдельные точки.

Как видно из рис. 2, наличие даже небольшого «хвоста» может существенно уменьшить  $\tilde{H}_b$ . Так, при  $\alpha = 1$  и  $\tilde{H}_x = 0.04$ , а также при  $\alpha = 2$  и  $\tilde{H}_x = 10^{-4}$  величина  $\tilde{H}_b$  составляет примерно 1/8 от  $H_0$ .

Может показаться, что пропуская оптимальный сигнал через фильтр, обладающий затуханием на частотах, больших чем  $\Omega$ , мы уменьшим  $H_b$  и получим сигнал лучше чем оптимальный. Это не так. При таком фильтре должно возрасти  $H_x$ , и  $H_b$  не будет меньше, чем у оптимального сигнала при этом новом  $H_x$ .

Таблица 4. Параметры сигналов при  $a = -0,75T_T$ ,  $b = 0,75T_T$ ,  $\alpha = 1,5$ 

$R$	$H_R$	$H_x$	$H_b$	$X_{-2}$	$X_{-1}$	$X_0$	$X_1$	$X_2$
$\infty$	$1109 \times 10^{-6}$	0	$1109 \times 10^{-6}$	0,1219	0,7131	1	0,7131	0,1219
5	$1101 \times 10^{-6}$	$17 \times 10^{-6}$	$928 \times 10^{-6}$	0,1182	0,7025	1	0,7253	0,1255
2	$905 \times 10^{-6}$	$75 \times 10^{-6}$	$755 \times 10^{-6}$	0,1137	0,6913	1	0,7420	0,1298
1	$784 \times 10^{-6}$	$195 \times 10^{-6}$	$588 \times 10^{-6}$	0,1076	0,6796	1	0,7666	0,1355
0,5	$641 \times 10^{-6}$	$427 \times 10^{-6}$	$427 \times 10^{-6}$	0,0988	0,6675	1	0,8059	0,1440
0,2	$453 \times 10^{-6}$	$939 \times 10^{-6}$	$265 \times 10^{-6}$	0,0839	0,6540	1	0,8777	0,1613
0,1	$337 \times 10^{-6}$	$1468 \times 10^{-6}$	$190 \times 10^{-6}$	0,0728	0,6436	1	0,9342	0,1824
0,05	$249 \times 10^{-6}$	$2163 \times 10^{-6}$	$141 \times 10^{-6}$	0,0638	0,6274	1	0,9800	0,2163

При расчетах в ряде (15) бралось до 9 членов — большего количества брать было нецелесообразно, так как это приводило лишь к незначительному уменьшению  $\tilde{H}_b$ , меньшему, чем точность расчета. Чтобы получить сигнал, у которого  $\tilde{H}_b$  всего лишь на несколько процентов больше чем у оптимального, оказалось достаточно при  $\alpha \leq 1$  трех членов ряда (15), для  $\alpha = 1,5$  — пяти и для  $\alpha = 2$  — семи членов. Эта зависимость станет понятной, если учесть, что при выбранном у нас  $\theta = (2/3)\pi$  члены ряда (15) сдвинуты друг относительно друга на  $T_T/3$ .

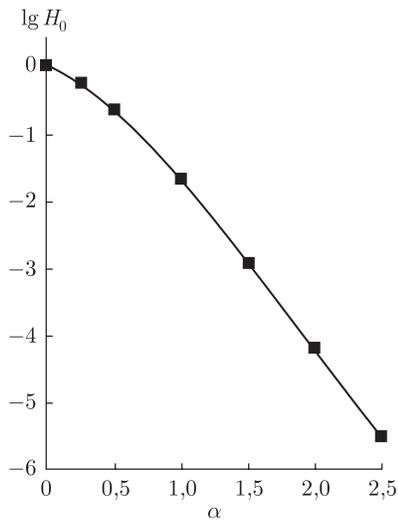


Рис. 1

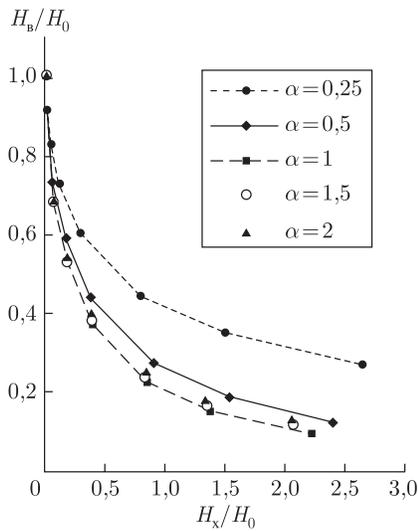


Рис. 2

Таблица 5. Параметры сигналов при  $a = -T_r$ ,  $b = T_r$ ,  $\alpha = 2$ 

$R$	$H_R$	$H_x$	$H_b$	$X_{-3}$	$X_{-2}$	$X_{-1}$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$\infty$	$57 \times 10^{-6}$	0	$57 \times 10^{-6}$	0,0141	0,2550	0,7242	1	0,7242	0,2550	0,0141
5	$52 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$48 \times 10^{-6}$	0,0139	0,2501	0,7195	1	0,7330	0,2596	0,0151
2	$47 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$	$39 \times 10^{-6}$	0,0132	0,2429	0,7110	1	0,7445	0,2668	0,0164
1	$41 \times 10^{-6}$	$10 \times 10^{-6}$	$31 \times 10^{-6}$	0,0125	0,2344	0,7017	1	0,7597	0,2758	0,0181
0,5	$33 \times 10^{-6}$	$22 \times 10^{-6}$	$23 \times 10^{-6}$	0,0120	0,2228	0,6908	1	0,7826	0,2889	0,0207
0,2	$24 \times 10^{-6}$	$48 \times 10^{-6}$	$14 \times 10^{-6}$	0,0115	0,2024	0,6720	1	0,8251	0,3157	0,0254
0,1	$17 \times 10^{-6}$	$74 \times 10^{-6}$	$10 \times 10^{-6}$	0,0111	0,1890	0,6562	1	0,8536	0,3400	0,0280
0,05	$13 \times 10^{-6}$	$114 \times 10^{-6}$	$7 \times 10^{-6}$	0,0099	0,1749	0,6302	1	0,8798	0,3760	0,0293

В таблицах 1–5 приведены параметры сигналов, близких к оптимальному. Эти параметры были получены методом, изложенным в приложении. Как можно показать, полученные при этом значения  $H_B$  несколько превосходят истинные величины, однако они отличаются от  $\tilde{H}_B$  всего на несколько процентов.

На рис. 3 приведен пример оптимального сигнала для параметров  $\alpha = 0,5$ ,  $R = \infty$ . Для него  $H_x = 0$ ,  $H_b = 0,2167$ . На рис. 4 пример оптимального сигнала для  $\alpha = 0,5$ ,  $R = 0,5$ . Для него  $H_x = 0,0770$ ,  $H_b = 0,1015$ .

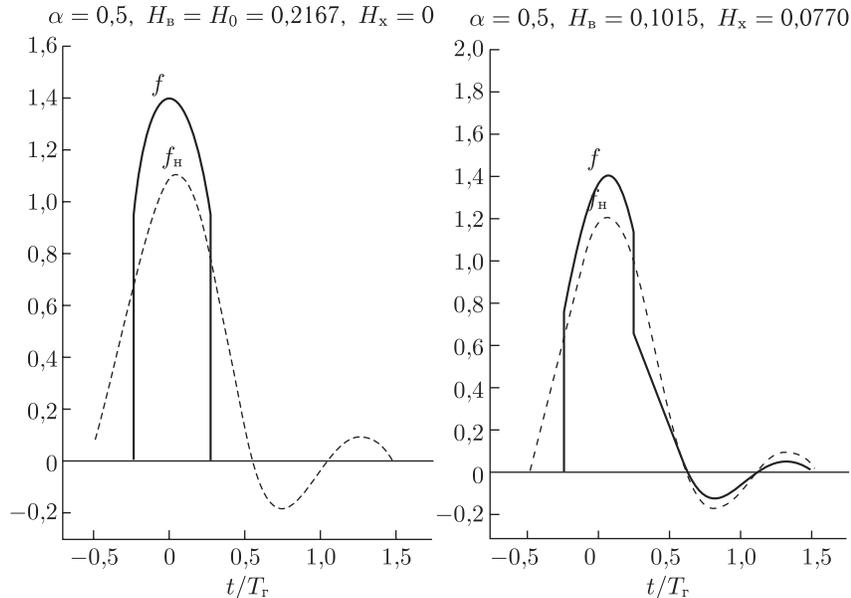


Рис. 3

Рис. 4

Полученные результаты можно использовать для выяснения, насколько сигналы в конкретных системах близки к оптимальным и насколько в них теоретически можно уменьшить энергию вредного спектра.

## Приложение

Найдем минимум выражения

$$V = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{nm} x_n x_m}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{nm} x_n x_m} \quad (\text{П.1})$$

методом последовательных приближений. Будем менять только  $x_i$ , оставляя остальные  $x_k$  постоянными. Выражение (П.1) может быть записано в виде

$$V = \frac{a_2 + 2a_1 x_i + a_0 x_i^2}{b_2 + 2b_1 x_i + b_0 x_i^2},$$

где

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum_{n \neq i} \sum_{m \neq i} A_{nm} x_n x_m; & a_1 &= \sum_{n \neq i} A_{ni} x_n; & a_0 &= A_{ii}; \\ b_2 &= \sum_{n \neq i} \sum_{m \neq i} B_{nm} x_n x_m; & b_1 &= \sum_{m \neq i} B_{ni} x_n; & b_0 &= B_{ii}. \end{aligned}$$

Здесь  $\sum_{n \neq i}$  обозначает суммирование по всем  $n$ , кроме  $n = i$ . Аналогично  $\sum_{m \neq i}$ . Таким образом, слагаемые с  $n = i$  и  $m = i$  при суммировании пропускаются и поэтому величины  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$ ,  $b_2$ ,  $b_1$ ,  $b_0$  не меняются при изменении  $x_i$ .

Приравняв нулю производную  $V$  по  $x_i$ , находим значения  $x_i$ , дающие минимум  $V$  при изменении  $x_i$  и постоянных  $x_k$  при  $k \neq i$ . Нахождение  $x_i$  сводится при этом, как легко показать, к решению квадратного уравнения.

На основании сказанного, отыскание  $x_i$ , соответствующих минимуму  $V$ , и величины этого минимума сводилось к тому, что находились описанным методом по очереди  $x_i$ , дающие минимум  $V$ . При этом  $V$  каждый раз уменьшалось. Процедура проводилась до тех пор, пока  $x_i$  и  $V$  не перестали меняться. Очевидно, полученное значение  $V$  является минимальным, а значения  $x_i$  — соответствующими этому минимуму.

Порядок выбора  $i$  был следующим. Бралось  $a = -b$ ,  $x_0 = 1$ , остальные  $x_i = 0$ . Затем брались  $i$  в следующем порядке:  $i = 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ , пока  $V$  перестало уменьшаться. После этого брались  $i = 2, -2, 1, -1, 2, -2, 1, -1, 2, \dots$  до тех пор, пока  $V$  снова не перестало уменьшаться. Затем брались  $i = 3, -3, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 1, \dots$  и т. д. Эта

процедура продолжалась до тех пор, пока увеличение  $i$  уменьшало  $V$ . Полученное значение  $V$  является минимально возможным.

Следует отметить, что порядок выбора  $i$  не влияет на конечный результат.

Если бы выражение (П.1) могло иметь несколько минимумов с различными значениями, то мы могли бы при принятой процедуре прийти не к наименьшему минимуму. Однако в случае, когда знаменатель выражения (П.1) при любых, не равных одновременно нулю,  $x_n$  положителен, что у нас имеет место, то, как можно показать, все минимальные значения выражения (П.1) должны равняться между собой.

### Список литературы

1. *Возенкрафт Дж., Джекобс И.* Теоретические основы техники связи. М.: Мир, 1969.
2. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
3. *Landau H. J., Pollac H. O.* // The Bell System Technical Journal. 1961. V. 40. № 1.
4. *Голд В., Райзер Н.* Цифровая обработка сигналов. М.: Сов. радио, 1973.

*Поступила  
в редакцию 30.01.96 г.*